ВАРИАЦИОННЫЕ ОБРАТНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

А.М.Елизаров

НИИММ Казанского государственного университета
elizarov@ksu.ru

Обсуждены постановки и методы решения вариационных обратных краевых задач аэрогидродинамики в рамках классических моделей механики жидкости и газа при изопериметрических ограничениях. Дан краткий обзор результатов в названной области. Описаны способы построения методами геометрической теории функций функционалов, выражающих оптимизируемые характеристики (подъемную силу, профильное сопротивление, аэродинамическое качество). Указаны свойства этих функционалов и при некоторых упрощающих предположениях построены экстремали, которые использованы для нахождения точных оценок аэродинамических характеристик. Даны оценки максимальной безразмерной циркуляции скорости в классе гладких замкнутых непроницаемых контуров фиксированного периметра, обтекаемых потоком идеальной несжимаемой жидкости, при дополнительных ограничениях на максимальную величину скорости на контуре и теоретический угол атаки.

Терминология и история вопроса. Термин "вариационные обратные задачи" введен Л.А.Аксентьевым [1] для обозначения класса краевых задач, в которых искомыми являются как решение дифференциального уравнения в частных производных (в частности, аналитическая функция), так и сама область его определения, причем последняя обладает некоторым экстремальным свойством. Как и в классических прямых краевых задачах, на границе области задается одно краевое условие. Вместе с тем, сама граница является искомым элементом решения, и поэтому такие задачи примыкают к широкому классу краевых задач с неизвестными границами. В качестве второго краевого условия на неизвестной границе выступает экстремальное свойство искомой области, выраженное в виде требования максимизации (минимизации) заданного функционала J (возможно, при дополнительных ограничениях).

В [1] приведена схема постановки вариационных обратных задач для аналитических функций, показывающая, как такие задачи можно получить, заменяя на оптимизационное одно их краевых условий в основной обратной краевой задаче (ОКЗ) (см. [2]). Учитывая это обстоятельство, а также то, что в постановке вариационных обратных задач сохраняются все характерные особенности ОКЗ, в [3] (см. также [4]) предложено называть их **вариационными обратными краевыми задачами**.

К настоящему времени специальная теория вариационных ОКЗ не создана. С одной стороны, это объясняется тем, что в силу самой постановки этих задач функционал J должен выражать некоторое экстремальное свойство как искомой области, так и искомой функции, и поэтому для корректности задачи необходимо заранее зафиксировать классы искомых объектов. Значит, анализ картины разрешимости вариационных ОКЗ будет непосредственно связан с выбором класса функционалов J, причем наличие или отсутствие дополнительных ограничений может существенно изменять эту картину. Поэтому нужно определить, какие функционалы целесообразно рассматривать и какие дополнительные ограничения нужно привлекать. Из общих соображений ответы на эти вопросы найти затруднительно. Этот вывод подтверждается, например, результатами работы [1], где поставлены и решены несколько вариационных ОКЗ для аналитических функций на классе однолистных областей с функционалом J, выражающим определенное изопериметрическое свойство. Наличие дополнительных ограничений в одних случаях гарантирует однозначную разрешимость задачи, а в других, наоборот, приводит к распаду задачи.

С другой стороны, вариационные ОКЗ по самой своей постановке относятся к задачам оптимального проектирования (см., например, [5, 6]), для которых теория разрешимости на языке свойств функционалов J уже построена. При этом роль дополнительных ограничений сводится к обеспечению компактности (или некоторого аналога этого свойства) множества определения J, а единственность решения, вообще говоря, не гарантируется. Вместе с тем, естественным источником вариационных ОКЗ являются теории, связанные с описанием природных явлений (например, течений жидкости или газа), причем выбор оптимизируемых функционалов и дополнительных ограничений определяется физическим смыслом тех процессов и явлений, которые моделирует вариационная задача. Одной из таких теорий является классическая аэрогидродинамика.

Вариационные ОКЗ аэрогидродинамики. Задачи нахождения формы тел, имеющих экстремальные гидродинамические или аэродинамические характеристики при обтекании жидкостью или газом, возникли с самого начала развития аэрогидродинамики и как чисто теоретические, и как важные для приложений проблемы.

Традиционный подход к аэродинамической оптимизации базируется на решении прямых краевых задач. Например, для случая плоских течений он заключается в следующем: для модификации исходного контура задают некоторое многопараметрическое семейство контуров; для каждого профиля, ограниченного таким контуром, рассчитывают аэродинамические характеристики, а их оптимизацию проводят за счет выбора значений свободных параметров в уравнении контура при различных ограничениях. Такой подход позволяет найти оптимальный профиль в фиксированном многопараметрическом классе, но требует в свою очередь специальных способов перебора контуров заданного семейства, так как при произвольном изменении значений управляющих параметров могут нарушиться введенные ограничения. Кроме того, при таком подходе не удается в явном виде записать оптимизируемые функционалы, а последовательное решение прямых задач требует применения методов численной оптимизации и значительных затрат вычислительных средств. Известны результаты в этом направлении для пространственного случая и достаточно сложных математических моделей течений. Обзор этих работ можно найти, например, в [7], пп. 9.2, 10.2.

Другой подход к оптимизации аэродинамических форм базируется на решении вариационных ОКЗ аэрогидродинамики, которые заключаются в построении профилей, обладающих оптимизированными характеристиками (максимальными подъемной силой или аэродинамическим качеством, минимальным сопротивлением и др.), и в случае течения идеальной несжимаемой жидкости (ИНЖ) или дозвукового течения газа в математическом плане сводятся к вариационным ОКЗ для аналитических функций. В рамках выбранных математических моделей течений решение таких задач позволяет не только предъявить наилучшие формы, но и дать точные оценки оптимизируемых характеристик и тем самым указать инженеру-проектировщику границы допустимого при оптимизации.

Ярким примером сказанному являются многочисленные работы по поиску формы крыловых профилей максимальной подъемной силы, выполненные в 20-30 годах нашего столетия. Этот цикл исследований был по-существу завершен работой М.А.Лаврентьева [8], который доказал, что среди гладких дуг заданной длины и ограниченной кривизны наибольшая циркуляция скорости Γ (следовательно, максимальная подъемная сила Y) при безотрывном обтекании потоком ИНЖ достигается на дуге окружности. Этот результат объяснил преимущество перед другими (в смысле максимизации Y) профилей Жуковского, так как их обтекание при не слишком большой толщине хорошо моделируется обтеканием средней линии, т.е. дуги окружности. В этой же работе сформулирована задача оптимизации формы профиля с учетом условий, обеспечивающих безотрывность обтекания бо́льшей части его контура.

Анализ работы [8] показал, что решенные в ней задачи можно отнести к рассматриваемому нами классу вариационных ОКЗ. Например, задачу максимизации подъемной силы можно переформулировать в следующем виде.

Рассмотрим множество однолистных областей G_z $(\infty \in G_z)$, ограниченных разрезами L_z по гладким дугам заданной длины и ограниченной кривизны, выходящими из начала координат. Представим G_z как образ внешности единичного круга G_ζ при конформном отображении $z = z(\zeta)$, $z(\infty) = \infty$, $z(1) = 0$. Рассмотрим множество функций $w(z)$, аналитических в области G_z, за исключением простого полюса и логарифмической особенности в бесконечности, $dw/dz(\infty) = 1$. Требуется найти такую пару $\{G_z, w(z)\}$, чтобы

$$\Im w(z)|_{L_z} = 0, \quad J \equiv |z'(\infty)| \cos(\gamma_*/2) \to \max$$

при дополнительном ограничении $\Re w(z)|_{L_z} \geq 0$, где $\exp(-i\gamma_*)$ – прообраз на окружности конца разреза L_z, являющегося точкой разветвления потока (здесь и далее $\Re$ и $\Im$ – обозначения вещественной и мнимой частей комплекснозначной функции).

Проведенные построения позволяют легко показать, что вариационные ОКЗ аэрогидродинамики также не всегда разрешимы. Например, если искомые функции $w(z)$, определенные в неограниченных областях G_z, имеют в окрестности бесконечности представление

$$w(z) = z + c_1 \ln z + \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^{-k}$$

(c_1 – вещественный параметр), причем разомкнутый контур L_w (образ L_z при отображении $w(z)$) является частью заданного ограниченного замкнутого контура L_0 с уравнением $\Phi(\varphi, \psi) = 0$, $w = \varphi + i\psi$, а

$$J = \left| \int\limits_{L_z} (dw/dz)^2 dz \right|,$$

то $J = 2\pi|c_1|$. Следовательно, требование $J \to \max$ эквивалентно нахождению диаметра L_0. Значит, величина c_1 может быть определена заранее (причем, не всегда однозначно), и исходная задача имеет бесчисленное множество решений, так как отсутствует условие для нахождения оставшихся произвольных коэффициентов c_k, $k \geq 2$. Таким образом, по-прежнему важной является проблема описания класса допустимых функционалов J, гарантирующих корректность вариационных ОКЗ аэрогидродинамики.

Ряд ярких результатов по решению вариационных ОКЗ аэрогидродинамики получен в теории струйных и кавитационных течений. Первая такая задача решена М.А. Лаврентьевым [9], который показал, что симметричным препятствием минимального сопротивления, обтекаемым по схеме Кирхгофа и имеющим заданные длину и ширину, является вертикальный отрезок со сходящими с него свободными линиями тока. Это решение долгое время оставалось единственным, обладающим экстремальными свойствами при струйном обтекании. В работе [10] рассмотрена задача об определении дуги максимальной подъемной силы, глиссирующей по поверхности идеальной жидкости без образования брызговых струй (длина дуги и ее хорда предполагались заданными). Аналогичным способом в [11] исследована задача о форме симметричной дуги минимального сопротивления, обтекаемой по схеме Кирхгофа. В работах [12, 13] получена форма осесимметричного кавитатора минимального сопротивления при заданной ширине каверны в классе каверн эллиптической формы при заданном числе кавитации.

Отметим, что близкие к [10, 11] подходы использованы в [14, 15] при решении оптимизационных задач теории фильтрации с депрессионными кривыми.

Задачи определения формы препятствий с минимальным сопротивлением обладают несомненной практической ценностью, однако в ряде областей техники возникает необходимость отыскания форм, обладающих максимальной тормозящей силой в потоке, например, при конструировании парашютов или реверсивных устройств турбореактивных двигателей. Ряд таких задач решен Д.В.Маклаковым (см. монографию [16] и обзор литературы в ней). Им, в частности, исследована задача об определении формы симметричной дуги заданной длины, имеющей наибольшее сопротивление при отрывном обтекании по схеме Кирхгофа. Задача решена при естественном дополнительном ограничении, что верхняя и нижняя струи не пересекаются. Это решение обобщено на случай обтекания дуги с образованием следа конечной ширины. В качестве схемы обтекания со следом использована схема Жуковского–Рошко–Эпплера. Кроме того, определена наилучшая форма криволинейного дефлектора: найдена форма симметричной криволинейной дуги заданной длины, разделяющей и отклоняющей струю фиксированной ширины на наибольший угол; такая дуга будет обладать и наибольшим сопротивлением. Последняя задача связана с моделированием течений в реверсивных устройствах ковшового типа.

Отметим также цикл исследований по построению оптимальных аэродинамических форм при сверх- и гиперзвуковых скоростях (обзор результатов и библиографию см. в [18–20]), потребовавших для получения решения вариационных задач не только привлечения всего арсенала методов классического вариационного исчисления, но и создания специальных методов и приемов (см. [20]).

В изученных к настоящему времени вариационных ОКЗ для аналитических функций корректность задач удается исследовать, если множество искомых областей можно задать в виде $\{z_P(G_\zeta)\}$, где $\{z_P(\zeta)\}$ – специальный класс конформных или квазиконформных отображений канонической области G_ζ (в частности, единичного круга E или его внешности E^-), описываемый управлением P, а краевое условие задачи определяет семейство областей $G_{w,Q}$, заданное управлением Q. Перейдя к области G_ζ, можно записать соотношение $G_{w,Q} = w_Q(G_\zeta)$. Теперь функционал задачи $J(G_z, w(z))$ может быть представлен в виде $J(P, Q)$, а краевое условие задает связь управляющих функций. В простейшем случае $J = J(P)$. Для вариационных ОКЗ аэрогидродинамики описанная схема реализуется следующим образом.

Зададим класс $\mathbf{L}$ замкнутых гладких контуров с фиксированным периметром L как множество образов единичной окружности при конформных отображениях $z = z_P(\zeta)$ внешности единичного круга $E^- = \{\zeta : |\zeta| > 1\}$ во вспомогательной плоскости ζ, нормированных условиями $z_P(\infty) = \infty, z_P(1) = 0$ и определяемых управляющей функцией $P(\gamma)$, $\gamma \in [0, 2\pi]$, где γ – полярный угол точек окружности $\zeta = \exp(i\gamma)$. Будем считать, что контуры непроницаемы (за исключением, быть может, изолированных особенностей) и обтекаются потоком ИНЖ со скоростью v_∞ на бесконечности, направленной горизонтально, а $w = w(z)$ – комплексный потенциал этого течения. Пусть функция $P(\gamma)$ удовлетворяет условию Гельдера (что будет достаточным для существования сингулярных интегралов) и определяет предельные значения на окружности вещественной части функции

$$\chi(\zeta) = \chi_0(\zeta) - \chi_1(\zeta), \quad \chi_0(\zeta) = \ln\left[v_\infty^{-1}\frac{dw}{dz}(\zeta)\right],$$

которая получается из функции Жуковского $\chi_0(\zeta)$ удалением особенностей (определяемых нулями и полюсами комплексно-сопряженной скорости dw/dz) посредством специального выбора функции $\chi_1(\zeta)$. Так как картина течения в физической плоскости является образом течения ИНЖ во внешности круга в плоскости ζ при конформном отображении, а искомый контур предполагается гладким, то все особенности функции $\chi_0(\zeta)$ будут совпадать с особенностями функции Жуковского для течения в E^-, поэтому в качестве $\chi_1(\zeta)$ целесообразно взять функцию

$$\chi_1(\zeta) = \ln\left(u_0^{-1}\frac{dw}{d\zeta}\right),$$

где $w = w(\zeta)$ – комплексный потенциал обтекания круга, u_0 – величина скорости набегающего потока в плоскости ζ. Итак, имеем

$$\chi(\zeta) = \ln\left[v_\infty^{-1}\frac{dw}{dz}(\zeta)\right] - \ln\left(u_0^{-1}\frac{dw}{d\zeta}\right) = \ln(u_0/v_\infty) - \ln\frac{dz}{d\zeta}, \quad (1)$$

$$P(\gamma) = \Re\chi(e^{i\gamma}), \quad \gamma \in [0, 2\pi], \quad (2)$$

причем $\chi(\infty) = i\beta$, где β – так называемый теоретический угол атаки, определяющий отклонение профиля от направления бесциркуляционного обтекания и равный углу наклона к оси абсцисс вектора скорости набегающего потока в плоскости ζ (т.е. $dw/d\zeta|_\infty = u_0 \exp(-i\beta)$). В силу (1) и (2) имеем

$$\chi_0(\zeta) = -(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} P(\gamma) \frac{e^{i\gamma} + \zeta}{e^{i\gamma} - \zeta} d\gamma + i\beta,$$

причем плотность $P(\gamma)$ интеграла Шварца удовлетворяет условию

$$\int_0^{2\pi} P(\gamma) d\gamma = 0. \tag{3}$$

Далее, из (1) следует, что

$$dz/d\zeta = u_0 v_\infty^{-1} \exp\left[-\chi(\zeta)\right], \tag{4}$$

и так как по предположению контуры класса $\mathbf{L}$ замкнуты (т.е. функции $z_P(\zeta)$ однозначны), то $P(\gamma)$ должна удовлетворять следующим хорошо известным условиям разрешимости ОКЗ аэрогидродинамики (см. [4], §2):

$$\int_0^{2\pi} P(\gamma) \cos\gamma d\gamma = \int_0^{2\pi} P(\gamma) \sin\gamma d\gamma = 0. \tag{5}$$

Окончательно, класс $\mathbf{L}$ рассматриваемых контуров задан конформными отображениями $z = z_P(\zeta)$, определяемыми из (4), а управляющая функция $P(\gamma)$ удовлетворяет, кроме перечисленных выше, дополнительным ограничениям (3) и (5). Параметр u_0 определяет линейный масштаб в физической плоскости и в силу фиксации периметра L контуров класса $\mathbf{L}$ связан с функцией $P(\gamma)$ равенством, вытекающим из (4):

$$u_0 = Lv_\infty / J(P), \quad J(P) = \int_0^{2\pi} \exp\left[-P(\gamma)\right] d\gamma. \tag{6}$$

При этом прообразом точки схода потока будем считать $\zeta = 1$. Теоретический угол атаки $\beta \in [0, \pi/2]$ и является оптимизационным параметром.

Рассмотрим следующую вариационную задачу.

Задача А. *Найти непроницаемый контур из класса* $\mathbf{L}$, *максимизирующий величину подъемной силы (или, что то же самое, величину циркуляции скорости) при безотрывном обтекании потоком ИНЖ с заданной величиной* v_∞ *скорости на бесконечности.*

Как известно из теории ОКЗ аэрогидродинамики (см. [4, 21]), если на искомом контуре задано распределение скорости $v = v(s)$ как функция дуговой абсциссы s этого контура, то решение задачи однозначно определяется из (1) и (2), причем функция $P(\gamma)$ и угол β однозначно находятся по распределению $v = v(s)$. Учитывая, что

$$\Gamma = J_1(v) \equiv \int_0^L v(s)ds,$$

для решения задачи А нужно максимизировать функционал $J_1(v)$ на соответствующем классе функций $v(s)$. Этот класс определяется условиями гидродинамической целесообразности, в результате возникают содержательные вариационные задачи (см. [4, 21]), причем экстремалями являются так называемые "полочные" распределения скорости, хорошо известные инженерам-проектировщикам. Однако при этом выразить условия разрешимости (3) и (5) через функцию $v(s)$ не удается, и поэтому приходится удовлетворять их подбором свободных параметров, вводимых в рассматриваемый класс распределений $v(s)$, либо применять метод квазирешений ОКЗ [4]. Последний минимально (в смысле нормы используемого функционального пространства) изменяет экстремальное распределение $v(s)$, но при этом, что особенно важно, сохраняет неизменным значение Γ циркуляции скорости, т.е. экстремальное значение функционала J_1, хотя величина угла β, конечно, изменяется.

Другой путь решения задачи А связан с тем, что в 1988 году мне удалось обнаружить [23] следующую связь управляющей функции $P(\gamma)$ и параметра оптимизации β с циркуляцией Γ.

Распределение скорости $u(\gamma) = |dw/d\zeta(e^{i\gamma})|$ на окружности (напомним, что по предположению она является линией тока, на которой $\Im w = 0$) имеет вид

$$u(\gamma) = u_0 h(\gamma), \tag{7}$$

где функция $h(\gamma)$ определяется выбранной топологией течения. В случае, когда искомый контур непроницаем всюду, имеем (см. [4])

$$h(\gamma) = h_1(\gamma, \beta) = 4\sin(\gamma/2)|\cos(\gamma/2 - \beta)|,$$

откуда нетрудно определить связь Γ и u_0:

$$\Gamma = 4\pi u_0 \sin\beta. \tag{8}$$

Из (6) и (8) теперь следует, что для максимизации Γ нужно минимизировать функционал $J_0(P, \beta) = J(P)/\sin\beta$ при ограничениях (3) и (5) на управляющую функцию $P(\gamma)$. Параметр оптимизации $\beta \in [0, \pi/2]$ и не связан с функцией P. Поэтому очевидно оптимальное значение $\beta = \beta^* = \pi/2$, что соответствует обтеканию контура с совпадением точек разветвления и схода потока. Этот вывод полностью согласуется с хорошо известным фактом (например, [22]), что наибольшая циркуляция скорости при обтекании окружности потоком ИНЖ достигается, когда точки торможения и схода потока совпадают.

Дальнейшие построения опираются на следующее утверждение, доказанное в [23].

Лемма. *Пусть $P(\gamma) \in L_2[0, 2\pi]$ и удовлетворяет ограничениям (3) и (5). Тогда для строго выпуклого функционала $J(P)$*

$$\inf_{P(\gamma)\in L_2} J(P) = 2\pi \tag{9}$$

и достигается на единственной функции $P(\gamma) = P_*(\gamma) \equiv 0$.

Из леммы следует, что искомый оптимальный контур определяется отображением $z(\zeta) = L(\zeta - 1)/(2\pi)$ и является окружностью радиуса $L/(2\pi)$, обтекаемой потоком ИНЖ так, что точки разветвления и схода потока совпадают. Абсолютный максимум безразмерной циркуляции $\Lambda = \Gamma/(Lv_\infty)$ есть $\Lambda^* = 2$.

Описанная схема решения вариационных ОКЗ аэрогидродинамики существенно использует отсутствие ограничений, связывающих управляющую функцию $P(\gamma)$ и управляющие параметры (в простейшем случае, параметр β). Нелинейная же зависимость управляющих параметров между собой определяется выбором схемы обтекания (в простейшем случае полностью непроницаемого контура такая зависимость также отсутствует). Связь функции $P(\gamma)$ и управляющих параметров появляется с дополнительными ограничениями при оптимизации. При ограничениях, имеющих физический смысл (условии безотрывности обтекания с учетом вязкости потока в приближении пограничного слоя, учете сжимаемости среды и других), даже при наличии строгой выпуклости функционала J доказать единственность экстремалей не удается. Ситуация еще более усложняется, когда в качестве оптимизируемой характеристики выбирается профильное сопротивление или аэродинамическое качество (соответствующие нелинейные функционалы также записаны в явном виде). В результате оптимизированные решения существенно отличаются от окружности, а получить их удается только численно (см. [24–27]). Однако при некоторых упрощающих предположениях (в частности, при специальном выборе эмпирических постоянных в критериях безотрывности обтекания) снова удается получить строго выпуклые функционалы и построить их экстремали [27, 28].

Круг как экстремальное решение. В работе [29] без доказательства отмечен следующий (на наш взгляд, нетривиальный) факт: из вариационных формул Лаврентьева для конформных отображений (см., например, [22]) вытекает, что в классе гладких замкнутых непроницаемых контуров фиксированного периметра максимум Y при обтекании потоком ИНЖ достигается на окружности. При этом, естественно, предполагается, что отрыва струй нет, а точка схода потока на контуре зафиксирована. Этот результат, как отмечено выше, является следствием леммы. В случае расположения на контуре точечных особенностей (источников и стоков) изменится вид функции $h(\gamma)$ в (7). Она будет содержать, кроме β, дополнительные параметры, определяющие положение прообразов особых точек на окружности и никак не связанные с управляющей функцией $P(\gamma)$ (при наличии источника или источника и стока вид функции $h(\gamma)$ получен в [30, 31]). Иную форму приобретает и соотношение (8), но по-прежнему величина u_0 входит в него в качестве сомножителя. Поэтому лемма позволяет сразу утверждать, что и в этих случаях оптимальным решением может быть только окружность, а отсутствие связей между управлением $P(\gamma)$ и управляющими парзметрами сводит исходную вариационную задачу к задаче минимизации функции нескольких переменных при нелинейных ограничениях-равенствах. Решение последней для различных схем обтекания получено в упомянутых работах [30, 31] и недавней работе [32].

Таким образом, размещение на искомом контуре точечных особенностей не приводит в математическом плане к новому содержанию, так как по-прежнему функцией, отвечающей за форму оптимального контура, будет экстремаль $P_* \equiv 0$ функционала $J(P)$ из (6) (т.е. оптимальным контуром будет окружность), а соответствующее значение безразмерной циркуляции скорости будет функцией параметров, определяющих положение точечных особенностей. В этом смысле математические выводы работы [30] нуждаются в корректировке, хотя итоговый результат верен, а проведенный там анализ оптимального расположения особенностей полезен с точки зрения построения верхних оценок подъемной силы. Остановимся кратко на этих оценках.

Как показано в [30], в случае расположения на окружности точечного стока заданной интенсивности Q абсолютный максимум Λ^* безразмерной циркуляции Λ равен $2\sqrt{2}$ и соответствует выбору значения $q = \sqrt{2}$ безразмерного расхода $q = Q/(v_\infty L)$. При дальнейшем увеличении q до 4 циркуляция уменьшается до нуля, причем при $q > 4$ нарушается принятая схема обтекания, а при $q = 0$ (сток отсутствует) снова имеем $\Lambda^* = 2$. В статье [31] результаты [30] перенесены на случай расположения на окружности двух точечных особенностей – источника и стока с заданными интенсивностями Q_1 и Q_2. Показано, что максимуму циркуляции соответствует выбор $Q_1 = Q_2$, а абсолютный максимум $\Lambda^* = 6$ достигается при $Q_1, Q_2 \to \infty$ – это случай диполя. Итак, наличие на окружности точечных особенностей приводит не только к изменению топологии течения, но и к значительному увеличению максимального значения циркуляции скорости (от $\Lambda^* = 2$ до $\Lambda^* = 6$). Параметрическое исследование задачи обтекания окружности с несколькими источниками и стоками проведено в [32].

Итак, как и в классических изопериметрических задачах, во многих вариационных ОКЗ аэрогидродинамики круг является экстремалью. Хотя такая форма далека от требований, предъявляемых практикой авиастроения, решение в виде круга получается аналитически, при минимальных ограничениях, диктуемых математической моделью течения, и, следовательно, дает точную оценку сверху для подъемной силы Y, достижимую в случае течения ИНЖ. Законно возникает вопрос, существуют ли в рамках модели ИНЖ вариационные задачи, экстремали в которых отличны от круга.

Естественным обобщением задачи А является следующая

Задача B. *Требуется найти контур из класса* $\mathbf{L}$, *максимизирующий величину подъемной силы при условии, что на контуре максимальное значение* $v_{\max}$ *приведенной скорости потока* v/v_∞ *не превосходит заданной величины* v_*.

Отметим, что в силу выбора модели ИНЖ максимум скорости потока достигается на обтекаемом контуре и поэтому $v_* > 1$.

Из (1) и (7) следует, что

$$v(\gamma)/v_\infty = h(\gamma)\exp\left[P(\gamma)\right]$$

и, следовательно, дополнительное ограничение из задачи B примет вид

$$P(\gamma) + \ln[2|\sin(\gamma - \beta) + \sin\beta|] \le \ln v_*, \quad \gamma \in [0, 2\pi]. \tag{10}$$

Как показано выше, глобальный минимум функционала $J_0(P, \beta)$ достигается на паре $P = P_* \equiv 0, \beta = \beta^* = \pi/2$. Очевидно, что при $v_* \ge 4$ это решение удовлетворяет и ограничению (10). Следовательно, при $v_* \ge 4$ максимум циркуляции снова достигается на окружности при совпадении точек разветвления и схода потока, а $\Lambda^* = 2$.

Покажем теперь, что окружность не будет экстремалью ни при каких значениях $1 < v_* < 2$.

Действительно, окружности всегда соответствует $P(\gamma) = P_* \equiv 0$. В этом случае неравенство (10) примет вид

$$\max_{\gamma\in[0,2\pi]} \ln[2|\sin(\gamma - \beta) + \sin\beta|] \le \ln v_*$$

или, иначе, $2(1 + \sin\beta) \le v_*$, что невозможно при $1 < v_* < 2$, так как $\beta > 0$.

Итак, получен положительный ответ на вопрос о существовании "некруговых" экстремалей. Сформулируем его в виде следующего утверждения, развивающего и дополняющего результаты [33].

Теорема 1. *Задача B безусловно разрешима, причем* $\Lambda^* \le 2\ln v_*$ *и* $\beta^* \le \arcsin\ln v_*$. *Кроме того:*

1^o *при* $v_* \geq 4$ *единственной экстремалью является окружность,* $\Lambda^* = 2$ *и* $\beta^* = \pi/2$;

2^o *при* $1 \leq v_* < 2$ *экстремаль отлична от окружности;*

3^o *при* $2 \leq v_* < 4$ *имеем* $\beta^* \leq \arcsin(v_*/2 - 1)$ *и* $v_* - 2 \leq \Lambda^* \leq 2\ln v_*$, *где* Λ^* *и* β^* *– соответственно абсолютный максимум* Λ *и экстремальное значение* β.

Отметим, что открытым остался вопрос о достижимости оценок в теореме 1 и единственности экстремалей. По-видимому, построить эти экстремали можно только численно, применив какой-либо из известных способов минимизации строго выпуклого функционала $J_0(P, \beta)$ при линейных ограничениях (3), (5) и нелинейном ограничении

$$\max_{\gamma \in [0,2\pi]} \{P(\gamma) + \ln[2|\sin(\gamma - \beta) + \sin\beta|]\} \leq \ln v_*.$$

Рассмотрим частный случай задачи В, когда величина β заранее зафиксирована (назовем его задачей В'). Для ее решения нужно минимизировать строго выпуклый функционал $J(P)$ при ограничениях (1) и (2) с заданным β. Имеет место

Теорема 2. *Необходимым условием разрешимости задачи В' является неравенство* $\sin\beta^* \leq \ln v_*$. *При этом если* $v_* \geq 2$ *и* $\sin\beta^* \leq v_*/2 - 1$, *то единственной экстремалью является окружность. При* $v_* \geq 1$ *и* $\max\{0, v_*/2 - 1\} \leq \sin\beta^* \leq \ln v_*$ *единственная экстремаль отлична от окружности.*

Отметим, что решение задач А и В в случае, когда поток ИНЖ обтекает искомый контур с образованием точки разветвления потока внутри области течения, исследован в [33].

Заключение. Приведенный выше краткий обзор результатов по решению вариационных ОКЗ, конечно, ни в коей мере не претендует на исчерпывающую полноту. Так, в стороне остались многие оптимизационные задачи теории фильтрации, а также задачи, связанные с получением точных оценок аэродинамических характеристик (см., например, [34–36] и библиографию в [4]). Многие результаты в данном направлении отражены в пятилетнем отчете НИИММ им. Н.Г.Чеботарева [37]. Все это позволяет с оптимизмом говорить об успешном развитии исследований в названной области. Еще одним свидетельством сказанному служат работы [32, 38] из настоящего сборника, в последней из которых снова подтверждена исключительная роль "круговых" экстремалей в вариационных ОКЗ.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 98-01-00200 и 99-01-00173).

ЛИТЕРАТУРА

1. Аксентьев Л. А. *Об однолистной разрешимости обратных краевых задач* // Тр. семин. по краевым задачам. – Казань: Изд-во Казан. ун-та. – 1973. – Вып. 10. – С. 11–24; 1974. – Вып. 11. – С.9–18.

2. Аксентьев Л. А., Ильинский Н. Б., Нужин М. Т., Салимов Р. Б., Тумашев Г. Г. *Теория обратных краевых задач для аналитических функций и ее приложения* // Итоги науки и техники. Матем. анализ. – М.: ВИНИТИ, 1980. – Т. 18. – С.67–124.

3. Елизаров А. М. *Регуляризация и оптимизация решений обратных краевых задач аэрогидродинамики.* Дисс. ... доктора физ.-мат. наук. – Казань, 1991.

4. Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В. *Обратные краевые задачи аэрогидродинамики: теория и методы проектирования и оптимизации формы крыловых профилей.* – М.: Физматлит, 1994. – 436 с.

5. Haslinger J., Neittaanmaki P. *Finite element approximation for optimal shape design: theory and application.* – New York: John Wiley and sons Ltd., 1988. – 335 p.

6. Pironneau O. *Optimal shape design for elliptic systems.* – New York: Springer, Springer Lecture Notes in Computational Physics, 1984. – 168 p.

7. Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В. *Обратные краевые задачи аэрогидродинамики* // Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. – М.: ВИНИТИ, 1989. – Т. 23. – С. 3–115.

8. Лаврентьев М. А. *Об одной экстремальной задаче в теории крыла аэроплана* // Тр. ЦАГИ. – 1934. – Вып. 155. – 41 с.

9. Лаврентьев М.А. *О некоторых свойствах однолистных функций с приложениями к теории струй* // Матем. сборник. – 1938. – Т. 4. – N 3. – С. 391–458.

10. Wu T.Y., Whitney A.K. *Theory of optimum shapes in free-surface flows. Part.1 Optimum profile on sprayless planing surface* // J. Fluid. Mech. – 1972. – V. 55. – P. 439–455.

11. Whitney A.K. *Theory of optimum shapes in free-surface flows. Part.2 Minimum drag profiles in infinite cavity flow* // J. Fluid. Mech. – 1972. – V. 55. – P. 457–472.

12. Гонор А. Л., Забутная В. И. *Вариационная задача о кавитационном сопротивлении тела вращения* // Математическое моделирование нестационарных задач механики сплошных сред. – М., 1985. – С. 7–14.

13. Гонор А. Л., Забутная В. И. *Определение формы кавитатора минимального сопротивления при обтекании потоком жидкости* // Струйные и отрывные течения. – М.: Изд-во МГУ, 1985. – С. 70–77

14. Ильинский Н. Б., Касимов А. Р. *Оптимизация формы земляного канала методом обратных краевых задач* // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1984. – N 3. – С. 76–80.

15. Ilyinsky N. B., Kacimov A. R. *The estimation of integral seepage characteristics of hydraulic structures in terms of the theory of inverse boundary-value problems* // Z. angew Math. Mech. – 1992. – V. 72. – No. 2. – P. 103–112.

16. Маклаков Д.В. *Нелинейные задачи гидродинамики потенциальных течений со свободными границами.* – М.: Янус-К, 1997. – 281 с.

17. Гонор А. Л., Черный Г. Г. *Поперечный контур тела минимального волнового сопротивления* // В кн. "Теория оптимальных аэродинамических форм" (под ред. *А. Миеле*). – М.: Мир, 1969. – С. 292–305.

18. Гонор А. Л., Крайко А. Н. *Некоторые результаты исследования оптимальных форм при сверх- и гиперзвуковых скоростях* // В кн. "Теория оптимальных аэродинамических форм" (Под ред. *А. Миеле*). – М.: Мир, 1969. – С. 456–492.

19. Гонор А. Л., Черный Г. Г. *Форма нетонких тел минимального волнового сопротивления* // В кн. "Теория оптимальных аэродинамических форм" (под ред. *А. Миеле*). – М.: Мир, 1969. – С. 379–395.

20. Крайко А. Н. *Вариационные задачи газовой динамики.* – М.: Наука, 1979. – 447 с.

21. Elizarov A. M., Il'inskiy N. B., Potashev A. V. *Mathematical*

methods of airfoils design. Inverse boundary-value problems of aerohydrodynamics. – Berlin: Wiley-VCH, 1997. – 292 p.

22. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1987. – 680 с.

23. Елизаров А.М. *Некоторые экстремальные задачи теории крыла*//Изв. вузов. Математика. – 1988. – N 10. – С. 71–74.

24. Елизаров А.М., Федоров Е.В. *Оптимизация аэродинамических форм методом обратных краевых задач* // Прикл. мат. и мех. – 1990. – Т.54. – N 4. – С. 571–580.

25. Елизаров А.М., Федоров Е.В. *Решение вариационных обратных краевых задач аэрогидродинамики методами численной оптимизации* // Журнал прикл. мат. и техн. физ. – 1993. – N 2. – С. 73–80.

26. Елизаров А.М., Федоров Е.В., Фокин Д.А. *Вариационные обратные краевые задачи аэрогидродинамики для дозвукового течения газа* // Журнал вычисл. мат. и матем. физ. – 1993. – Т. 33. – N 6. – С. 958–968.

27. Фокин Д.А. *Максимизация аэродинамического качества крыловых профилей в вязком потоке жидкости* // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 1998. – N 3. – С. 177–184.

28. Elizarov A.M., Fokin D.A. *Upper estimates of airfoil aerodynamic characteristics for a viscous incompressible flow* // Труды Математического Центра им. Н.И.Лобачевского. – Казань: Изд-во "Казанское математическое общество". Изд-во "ДАС", 1998. – С. 183–196.

29. Зубов В.И. *К вопросу об оптимальном профиле крыла в потоке идеальной несжимаемой жидкости* // Журнал вычисл. мат. и матем. физ. – 1980. – Т. 20. – N 1. – С. 241–245.

30. Абзалилов Д.Ф., Ильинский Н.Б. *Об одной экстремальной задаче обтекания потоком идеальной несжимаемой жидкости гладкого контура со стоком* // Докл. АН России. – 1997. – Т. 354. – N 1. – С. 43–46.

31. Абзалилов Д.Ф., Марданов Р.Ф. *О максимизации подъемной силы гладкого контура с источником и стоком* // Труды молодежной школы-конференции по математическому моделированию, алгебре и геометрии, Казань, 4–11 декабря 1997 г. – Математический центр им. Н.И.Лобачевского, Казань: Изд-во Казанск. матем. об-ва, 1998.

32. Марданов Р.Ф. *Численное решение задачи максимизации*

подъемной силы кругового контура с размещенными на нем источниками и стоками // Настоящий сборник.

33. Елизаров А.М. *Об изопериметрических задачах максимизации подъемной силы замкнутого гладкого контура в потоке идеальной несжимаемой жидкости* // Научно-исследовательский институт математики и механики имени Н.Г.Чеботарева. 1993–1997 / Под редакцией А.М.Елизарова и С.А.Кузнецова. – Казань: Изд-во "Казанское математическое общество". Изд-во "ДАС", 1998. – С. 176–187.

34. Авхадиев Ф. Г., Елизаров А. М. *Оценки критического числа Маха для некоторых классов несущих крыловых профилей* // Моделирование в механике. – 1992. – Т. 6. – N 3. – С. 5–13.

35. Авхадиев Ф. Г., Елизаров А. М., Фокин Д. А. *Максимизация критического числа Маха для несущих крыловых профилей* // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 1992. – N 3. – С. 155–162.

36. Елизаров А. М. *Модели механики жидкости и газа в теории крыла и оптимальное управление аэродинамическими формами* // Моделирование в механике. – Новосибирск: СО РАН. – 1993. – Т. 7 (24). – N 2. – С. 64–90.

37. Научно-исследовательский институт математики и механики имени Н.Г.Чеботарева. 1993-1997 / Под редакцией А.М.Елизарова и С.А.Кузнецова. – Казань: Изд-во "Казанское математическое общество". Изд-во "ДАС", 1998. – 235 с.

38. Ильинский Н.Б., Якимов Н.Д. *О подъемной силе крылового профиля типа дужки со стоком* // Настоящий сборник.